série n°5

4ème.sc

EXERCICE N°1

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$

1/a) Vérifier que $(e^{i\theta} - i)^2 = -1 + e^{2i\theta} - 2ie^{i\theta}$

b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$

2/ On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i - e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$

a) Déterminer et construire l'ensemble ζ_1 décrit par le point M_1 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$

b) Calculer l'affixe du milieu I du segment $[M_1M_2]$

c) Déduire et construire l'ensemble ζ_2 décrit par le point M_2 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$

3/a) Montrer que $(M_1M_2)^2 = 8(1 - \sin\theta)$

b) Déduire la valeur de θ pour laquelle M_1M_2 est maximale.

EXERCICE N°2

Soit $P(z) = z^3 - (4 + 3i)z^2 + (5 + 8i)z + 4 - 7i$

1/a) Calculer P(i)

b) Déterminer les nombres complexes a , b et c tel que pour tout nombre complexes z :

$$P(z) = (z - i).(az^2 + bz + c)$$

c) Résoudre alors l'équation P(z) =0

2/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A(i) ; B(2 – i) et C (2+3i)

a) Placer les points A ; B et C

b) En déduire que ABC est un triangle isocèle rectangle en A

EXERCICE N°3

1/a) Ecrire sous forme algébrique : $(9 + 2i)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + (9 - 2i)z - 18i = 0$

2/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E') : Z^4 + (9 - 2i)Z^2 - 18i = 0$

3/ le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$

a) Placer les points A et B d'affixes respectives $1 + i$ et $3i$

b) Soit C le point d'affixe $1 + \alpha i$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Déterminer α pour que le triangle ABC soit rectangle en C

c) Pour $\alpha = 3$ déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x - 5$

1/ Etudier les variations de f

2/ En déduire le nombre de solution de l'équation f(x)=0

3/ Donner un encadrement de (ou des) solutions (s) d'amplitude 10^{-1}

EXERCICE N°4

On donne dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé directe $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

les points $A(1,1,1)$; $B(-1,2,-1)$; $C(2,3,5)$ et $D(1,0,-1)$

1/ Calculer $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$

2/ En déduire que les points A,B,C et D ne sont pas coplanaires

3/ calculer le volume du parallélépipède déterminé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

EXERCICE N°5

Soit la droite $D : \begin{cases} x = 3\alpha - 2 \\ y = 1 \\ z = -4\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$ et $A(2, 1, 6)$

1/ Donner un point et un vecteur directeur de D

2/ Calculer $d(A, D)$

EXERCICE N°6

Soit A et B deux points de l'espace ξ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de V

1/ Déterminer l'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

2/ Déterminer l'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$

3/ Déterminer l'ensemble des points M de ξ tels que $(\vec{u} \wedge \vec{V}) \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{0}$